三重大学物理工学科集中講義「相対論熱力学」メモ

福井県立大学　中村匡

December 17, 2012

1　相対論の共変表現

1. $x-y$ 平面内のベクトル (A_x, A_y)
   (a) 大きさ
   $$|A|^2 = A_x^2 + A_y^2 .$$
   (b) 座標の回転
   $$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$
2. $t-x$ 平面内のベクトル (A_x, A_y)
   (a) 大きさ
   $$|A|^2 = A_t^2 - A_t^2$$
   (b) 座標の回転
   $$\begin{pmatrix} A_{t'} \\ A_{x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ A_x \end{pmatrix} .$$
   Note: $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$。
   (c) 4 元速度（この場合は二次元なので 2 成分）
   $$\begin{aligned} (u_t, u_x) &= (\cosh\theta, \sinh\theta) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) . \end{aligned}$$
3. 計量
   (a) ベクトルの大きさ
   $$|A|^2 = (A_t . A_x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ A_x \end{pmatrix} .$$
   (b) アインシュタイン規約
   $$\begin{aligned} |A^2| &= A_\mu A^\mu = A_t A^t - A_x A^x \\ &= A_\mu \eta^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu . \end{aligned}$$
      i. 計量テンソル
      $$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) 共変ベクトルと反変ベクトル

$$\text{スカラー} = (\text{共変ベクトル})_\mu(\text{反変ベクトル})^\mu$$

4. （例）フラックス

(a) 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla(\rho \mathbf{v})$$

i. 4 元フラックス

$$J_\mu = \rho(u_t, u_x, u_y, u_z)$$

ただし $u_i = v_i/\sqrt{1-v^2}$ $(i = x, y, z)$, $u_t = 1/\sqrt{1-v^2}$。

ii. 4 元フラックスの保存

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} J^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\eta^{\mu\nu}J_\nu \, .$$

(b) フラックス

$$\text{流量} = \text{フラックス} \times \text{面積}$$

Note: フラックスも面積も向きがある。

5. スカラー量から生じる三次元フォーム

(a) ベクトル　＝　線

$$\mathbf{v} = v^x \mathbf{e}_x + v^x \mathbf{e}_y + v^z \mathbf{e}_z \, .$$

i. 内積＝１フォーム：線をあたえるとスカラーを返す線形関数

$$u(\mathbf{v}) = v^x u_x + v^y u_y + v^z u_z \, .$$

(b) ２ベクトル ＝ たて × よこ = 面積

$$\mathbf{s} = s^{xy}\mathbf{e}_{xy} + s^{yz}\mathbf{e}_{yz} + s^{zx}\mathbf{e}_{zx} \, .$$

i. 行列で書くと

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & s^{xy} & s^{xz} \\ s^{yx} & 0 & s^{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & 0 \end{pmatrix}$$

ただし $s_{ij} = -s_{ji}$.

ii. フラックス＝２フォーム：面積をあたえると流量（スカラー）を返す線形関数。

$$J(\mathbf{s}) = J_{xy}s^{xy} + J_{yz}s^{yz} + J_{zx}s^{zx} \, .$$

iii. 外積=いろいろパターンあり。　２フォームに１ベクトルをかますと

$$a_j = J_{ij}v^i$$

行列で書くと

$$\begin{pmatrix} 0 & J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{xy} & 0 & J_{yz} \\ J_{zx} & -J_{yz} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xy}v_y - J_{zx}v_z \\ -J_{xy}v_x + J_{yz}v_z \\ J_{zx}v_x - J_{yz}v_y \end{pmatrix}$$

(c) 3ベクトル = たて×よこ×高さ = 体積

$$V = V^{xyz}\mathbf{e}_{xyz}$$

i. 密度＝3フォーム：体積をあたえると総量（スカラー）を返す線形関数

$$\rho(\mathbf{V}) = \rho_{xyz}V^{xyz}$$

6. ベクトル量から生じる三次元フォーム

(a) ベクトル量でも同じように線，面積，体積をあたえると，ベクトル量を返す線形関数を考えることができる。

(b) ベクトル量のフラックス＝1ベクトル2フォーム：面積を与えるとベクトルを返す線形関数

i. ベクトルが運動量の場合，応力テンソル

$$\mathbf{T}(\mathbf{s}) = J(\mathbf{s}) = \mathbf{T}_{xy}s^{xy} + \mathbf{T}_{yz}s^{yz} + \mathbf{T}_{zx}s^{zx}$$

(c) さらに，テンソルから生じるフォームも考えられる。

7. スカラーから生じる4次元フォーム

(a) スカラー S（1成分），1フォーム u_μ（4成分），2フォーム $J_{\mu\nu}$（6成分），3フォーム $\sigma_{\mu\nu\alpha}$（4成分），4フォーム $\rho_{\mu\nu\alpha\beta}$（1成分）

i. n フォーム＝ ${}_4C_n$ 成分。

ii. ex. 2フォーム: $(J_{tx}, J_{ty}, J_{tz}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz})$。幾何学的に6成分しかない。行列であらわすと

$$J_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & J_{tx} & J_{ty} & J_{tz} \\ J_{xt} & 0 & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yt} & J_{yx} & 0 & J_{yz} \\ J_{zt} & J_{zx} & J_{zy} & 0 \end{pmatrix} \quad (s_{\mu\nu} = -s_{\mu\nu})$$

(b) Minkowski 空間の場合，計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ がからむので Euclid 空間と違ってくる。

(c) 電磁場

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_{tx} & E_{ty} & E_{tz} \\ -E_{tx} & 0 & B_{xy} & -B_{zx} \\ -E_{tx} & -B_{xy} & 0 & B_{yz} \\ -E_{tx} & B_{zx} & -B_{yz} & 0 \end{pmatrix}$$

この表記を使うと$\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$，ただし，$j_\nu = (\rho, j_x, j_y, j_z)$。3次元表記では

$$\nabla\mathbf{E} = \rho\,,\ \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{j}\,.$$

8. エネルギー運動量テンソル

(a) エネルギー運動量というベクトルの3次元体積密度

$$T_{\mu:\alpha\beta\gamma}$$

添字 $\alpha\beta\gamma$ で指定される3次元体積（4次元空間では「面」）を横切るエネルギー運動量の μ 成分。

(b) $\alpha\beta\gamma$ を μ であらわすと

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{tt} & T_{tx} & T_{ty} & T_{tz} \\ T_{xt} & T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yt} & T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zt} & T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}.$$

幾何学的には16成分あるが，物理的要請から $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ なので，独立な成分は10。

2　相対論的熱力学

1. 最大エントロピー分布（非相対論的）

   (a) 分布関数を $f(x, v, t)$ とすると，エントロピー

   $$S = \int f \ln f \, dxdv$$

   (b) 拘束条件：エネルギーと粒子数の保存

   $$\int f \, dxdv = 1\text{，}\ N \int \frac{1}{2} mv^2 f \, dxdv = E$$

   ただし，N は総粒子数。

   (c) 最大エントロピー分布

   $$f = A \exp(-\beta\varepsilon) = A \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

      i. $\beta = 1/k_B T$: 逆温度　=　ラグランジュの未定係数

   (d) 拘束条件に運動量保存 $N \int mvf \, dxdv = P$ を加えると？

      i. 最大エントロピー分布

      $$f = A \exp(\beta_0 \frac{mv^2}{2} - \beta_1 mv) = A \exp\left(-\frac{1}{k_B T}\left[\frac{mv^2}{2} - mvV\right]\right)\text{，}\ (V = \frac{P}{Nm})$$

      ii. 非相対論の場合は単なるガリレイ変換

      $$\sum_i \frac{v_i^2}{2} = \sum \frac{\Delta v_i^2}{2} + \frac{NV^2}{2}$$

2. 最大エントロピー分布（相対論）

   (a) 相対論の場合，重心というものが定義できない → 内部エネルギーと並進運動エネルギーが分離できない。

   (b) エネルギー運動量保存の共変的表現

   $$\beta_0 \frac{mv^2}{2} + \beta_1 mv \rightarrow \beta_0 p^0 + \beta_1 p^1 = \beta_\mu p^\mu$$

   (c) 四元逆温度

   $$\beta_\mu = \frac{u_\mu}{k_B T}$$

   ただし，T は物体が静止している系で測った温度。